Was für eine Ordnungsrelation macht auf einem Kreis Sinn? Eine 2-stellige Relation geht wahrscheinlich überhaupt nicht. Transitivität kann sicher nicht erreicht werden.

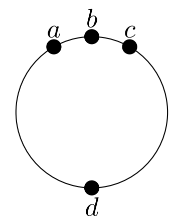

Abbildung 1: Beispiel

Ich möchte $a < b < c < d < a$ in dieser Situation (Abb. 1). Und Transitivität, also dass $a < b$ und $b < c$ implizieren, dass $a < c$. Das „geht“ aber nur, wenn der Abstand zwischen a und c genug klein ist.

Deshalb ist wohl eine 3-stellige Relation $\circlearrowleft$ nötig. Ich nenne sie mal „zwischen“, „Orientierung“ oder „Drehsinn“ und definiere sie so, dass $\circlearrowleft abc$ genau dann wenn die Situation wie in Abb. 2 aussieht. Offensichtlich gibt es eine „umgekehrt orientierte“ Relation $\circlearrowright$ und man kann jeweils wählen, welche der beiden man benutzt. Ganz so, wie man zwischen $<$ und $>$ aussuchen kann.

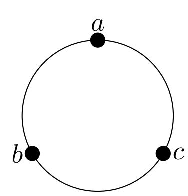

Abbildung 2: Definition

Formal: Sei $f : \mathbb{R} \to S^1$ die std. Überdeckung ($x \mapsto \exp(ix) \in S^1 \subseteq \mathbb{C}$). Sei $x \in f^{-1}(a)$. Ich setze nun, dass $\circlearrowleft abc$, falls $\min((x, \infty) \cap f^{-1}(b) < \min((x, infty) \cap f^{-1}(c)$.

Das gilt genau dann, wenn es ein Intervall $[a_0, c_0] \subseteq \mathbb{R}$ gibt, so dass $f_{|[a_0,c_0]}$ injektiv ist und $b \in f((a_0, c_0))$.

Diese Relation hat ein paar Eigenschaften:

- Sie ähnelt $<$ dadurch, dass falls $\circlearrowleft abc$ dann sind die Punkte a, b, c paarweise verschieden.
- $\circlearrowleft abc$ und $\circlearrowleft bdc$ implizieren $\circlearrowleft abd$ und $\circlearrowleft bdc$. (Transitivität?)
- Für alle $a, b \in S^1$ gibt es $c, d \in S^1$ so dass $\circlearrowleft abc$ und $\circlearrowleft adb$. (= Dicht)
- Es gilt nicht: $\circlearrowleft abc$ und $\circlearrowleft bcd$ impliziert $\circlearrowleft abd$ oder $\circlearrowleft acd$!

- Es gilt „Dreh-Symmetrie“: $\circlearrowleft abc$ impliziert $\circlearrowleft bca$ und $\circlearrowleft cab$.
- Aus diesen Regeln lässt sich folgern, dass aus $\circlearrowleft abc$ und $\circlearrowleft cda$ die Aussagen $\circlearrowleft abd$ und $calcab$ folgen.

Wie kann man $\circlearrowleft$ axiomatisieren (eindeutig und mit Axiomen die unabhängig sind voneinander)? Kann man die Topologie von S^1 aus $\circlearrowleft$ rekonstruieren? Ja. Ein offenes „Intervall“ von S^1 zwischen $a, c \in S^1$ hat die Form $\{b \in S^1 \mid \circlearrowleft abc\}$.

Was für Objekte haben ähnliche Ordnungsrelationen? Sicher können wir die Enden der geschlossenen langen Gerade zusammenkleben und erhalten etwas, das wie ein grosser Kreis aussieht. Die zugehörige Ordnungsrelation verhält sich sehr ähnlich.

Es ist ja $(\mathbb{Q}, <)$ die bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte abzählbare lineare Ordnung. Gibt es ein ähnliches Objekt für geeignet axiomatisierte $\circlearrowleft$ Relationen?

Gibt es analoge Relationen für höherdim. Mannigfaltigkeiten und „Ordnungen“ bzw. „Inzidenzrelationen“ darauf? Sphären, Torus, $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, Wedge of two circles, Hawaiian Earring.